

Temat: Postać iloczynowa funkcji kwadratowej.

Funkcja kwadratowa $f(x) = ax^2 + bx + c$ może być zapisana w postaci iloczynowej czyli jako mnożenie pewnych czynników.

Jeżeli funkcja posiada dwa miejsca zerowe x_1 i x_2 , to jej wzór przybiera postać

$$f(x) = a(x - x_1)(x - x_2).$$

[zobacz uzasadnienie](#) *

W przypadku jednego miejsca zerowego x_0 funkcję można zapisać w postaci

$$f(x) = a(x - x_0)(x - x_0) = a(x - x_0)^2.$$

Jeśli funkcja nie ma miejsc zerowych, to nie istnieje jej zapis w postaci iloczynowej.

Jak zapisać funkcję kwadratową w postaci iloczynowej ?

Przykłady

$$f(x) = x^2 - 5x - 14$$

$a = 1$	$b = -5$	$c = -14$
---------	----------	-----------

Wyznaczamy miejsca zerowe funkcji.

$$\Delta = (-5)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-14) = 25 + 56 = 81$$

$$\sqrt{\Delta} = \sqrt{81} = 9$$

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{5 - 9}{2} = -2 \qquad x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{5 + 9}{2} = 7$$

Zapis w postaci iloczynowej: $f(x) = 1(x - (-2))(x - 7) = (x + 2)(x - 7)$

$$f(x) = 3x^2 - 12x + 12$$

$a = 3$	$b = -12$	$c = 12$
---------	-----------	----------

Wyznaczamy miejsca zerowe funkcji.

$$\Delta = (-12)^2 - 4 \cdot 3 \cdot 12 = 144 - 144 = 0$$

$$x_1 = \frac{-b}{2a} = \frac{12}{6} = 2$$

Zapis w postaci iloczynowej: $f(x) = 3(x - 2)^2$

$$f(x) = -x^2 + 3x - 7$$

$a = -1$	$b = 3$	$c = -7$
----------	---------	----------

Wyznaczamy miejsca zerowe funkcji.

$$\Delta = 3^2 - 4 \cdot (-1) \cdot (-7) = 9 - 28 = -19 < 0$$

Nie ma zapisu w postaci iloczynowej.

.....

Zastosowanie postaci iloczynowej w zadaniach

Zadanie Napisz wzór funkcji kwadratowej $f(x)$, która spełnia jednocześnie warunki $f(0) = -4$, $f(-4) = 0$ i $f(3) = 0$.

Rozwiązanie

Jeśli $f(-4) = 0$ i $f(3) = 0$, to $x = -4$ i $x = 3$ są miejscami zerowymi. Możemy zatem zapisać funkcję w postaci iloczynowej $f(x) = a(x + 4)(x - 3)$.

Szukamy współczynnika a .

$$f(0) = -4 \text{ zatem dla } x = 0 \text{ mamy } f(0) = a(0 + 4)(0 - 3) = -4$$

$$a \cdot 4 \cdot (-3) = -4$$

$$-12a = -4 \quad /: (-12)$$

$$a = 1/3$$

$$\text{Zapis w postaci iloczynowej: } f(x) = \frac{1}{3}(x + 4)(x - 3)$$

Po przekształceniu mamy:

$$f(x) = \frac{1}{3}(x + 4)(x - 3) = \frac{1}{3}(x^2 - 3x + 4x - 12) = \frac{1}{3}x^2 - x + \frac{4}{3}x - 4$$

$$\text{Zapis w postaci ogólnej: } f(x) = \frac{1}{3}x^2 + \frac{1}{3}x - 4$$

.....

Zadanie domowe

1) Zapisz funkcję kwadratową w postaci iloczynowej

$$f(x) = x^2 - 17x + 42$$

$$f(x) = x^2 - 7x + 14$$

$$f(x) = \frac{1}{9}x^2 + \frac{4}{3}x + 4$$

$$f(x) = -2x^2 + 7x - 3$$

2) Napisz wzór funkcji kwadratowej wiedząc, że spełnia ona jednocześnie warunki $f(0) = 3$, $f(-3) = 0$ i $f(4) = 0$.

* *Uzasadnienie:*

$$\begin{aligned}f(x) &= a(x - x_1)(x - x_2) = a\left(x - \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}\right)\left(x - \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}\right) = \\&= a\left(x + \frac{b + \sqrt{\Delta}}{2a}\right)\left(x + \frac{b - \sqrt{\Delta}}{2a}\right) = a\left(x^2 + x \cdot \frac{b - \sqrt{\Delta}}{2a} + x \cdot \frac{b + \sqrt{\Delta}}{2a}\right) + \frac{b^2 - \Delta}{4a^2} = \\&= a\left(x^2 + x \cdot \left(\frac{2b}{2a}\right) + \frac{b^2 - (b^2 - 4ac)}{4a^2}\right) = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{4ac}{4a^2}\right) = \\&= a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{4ac}{4a^2}\right) = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right) = ax^2 + bx + c\end{aligned}$$

czyli

$$f(x) = a(x - x_1)(x - x_2) = ax^2 + bx + c$$