

Temat: Równanie kwadratowe.

Równanie postaci $ax^2 + bx + c = 0$ gdzie $a \neq 0$ i a, b, c są ustalonymi liczbami rzeczywistymi nazywamy równaniem kwadratowym albo równaniem drugiego stopnia.

Rozwiązywanie równania kwadratowego $ax^2 + bx + c = 0$ jest równoznaczne z wyznaczaniem miejsc zerowych funkcji kwadratowej $f(x) = ax^2 + bx + c$.

Przykład

$$3x^2 + 5x + 2 = 0$$

Obliczamy wyróżnik (deltę): $\Delta = b^2 - 4ac = 25 - 4 \cdot 3 \cdot 2 = 1$

$$\sqrt{\Delta} = 1$$

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-5 - 1}{6} = -1 \quad x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-5 + 1}{6} = -\frac{4}{6} = -\frac{2}{3}$$

.....

Rozróżniamy równania kwadratowe

$$\text{ZUPEŁNE } ax^2 + bx + c = 0$$

$$\text{i NIEZUPEŁNE } ax^2 = 0, ax^2 + c = 0, ax^2 + bx = 0.$$

Dla równań zupełnych stosujemy wzory na miejsca zerowe funkcji kwadratowej, które nazywamy PIERWIASTKAMI równania.

Pierwiastki równań niezupełnych można obliczyć prostszymi metodami.

.....

Równanie kwadratowe ZUPEŁNE – metoda rozwiązywania

$$ax^2 + bx + c = 0$$

a) Jeżeli $\Delta > 0$, to równanie ma dwa rozwiązania (dwa pierwiastki)

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \quad \text{i} \quad x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}.$$

b) Jeżeli $\Delta = 0$, to równanie ma jedno rozwiązanie (jeden pierwiastek)

$$x_1 = \frac{-b}{2a}.$$

c) Jeżeli $\Delta < 0$, to równanie nie ma rozwiązań (brak pierwiastków).

Przykłady

$$4x^2 - 5x + 1 = 0$$

$$\Delta = 25 - 4 \cdot 4 \cdot 1 = 25 - 16 = 9 > 0 \quad \text{są dwa rozwiązania}$$

$$\sqrt{\Delta} = 3$$

$$x_1 = \frac{5-3}{8} = \frac{2}{8} = \frac{1}{4} \qquad x_2 = \frac{5+3}{8} = \frac{8}{8} = 1$$

.....

$$-2x^2 + 3x - 1 = 0$$

$$\Delta = 9 - 4 \cdot (-2) \cdot (-1) = 9 - 8 = 1 > 0 \quad \text{są dwa rozwiązania}$$

$$\sqrt{\Delta} = 1$$

$$x_1 = \frac{-3-1}{-4} = 1 \qquad x_2 = \frac{-3+1}{-4} = \frac{1}{2}$$

.....

$$x^2 - 4x + 4 = 0$$

$$\Delta = 16 - 4 \cdot 4 \cdot 1 = 16 - 16 = 0 \quad \text{jest jedno rozwiązanie} \quad x_0 = \frac{4}{2} = 2$$

.....

$$\frac{1}{2}x^2 - 4x + 32 = 0$$

$$\Delta = 16 - 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot 32 = 16 - 64 = -48 < 0 \quad \text{nie ma rozwiązań}$$

.....

$$-x^2 - 4x - 10 = 0$$

$$\Delta = 16 - 4 \cdot (-1) \cdot (-10) = 16 - 40 = -24 < 0 \quad \text{nie ma rozwiązań}$$

.....

a) $ax^2 = 0$ ($a \neq 0, b = 0, c = 0$)

jest jedno rozwiązanie $x = 0$

b) $ax^2 + c = 0$ ($a \neq 0, b = 0, c \neq 0$)

METODA:

$$ax^2 + c = 0$$

$$ax^2 = -c \quad /: a$$

$$x^2 = -\frac{c}{a}$$

Gdy $-\frac{c}{a} < 0$, to równanie nie ma pierwiastków (jest sprzeczne).

Gdy $-\frac{c}{a} > 0$, to równanie dwa pierwiastki $x_1 = \sqrt{-\frac{c}{a}}$ i $x_2 = -\sqrt{-\frac{c}{a}}$.

Przykłady

$$3x^2 - 6 = 0$$

$$3x^2 = 6 \quad /: 3$$

$$x^2 = 2$$

są dwa rozwiązania

$$x_1 = \sqrt{2} \quad x_2 = -\sqrt{2}$$

$$4x^2 + 16 = 0$$

$$4x^2 = -16 \quad /: 4$$

$$x^2 = -4 \quad \text{sprzeczność}$$

brak rozwiązań

c) $ax^2 + bx = 0$ ($a \neq 0, b \neq 0, c = 0$)

METODA:

$$ax^2 + bx = 0$$

$$ax\left(x + \frac{b}{a}\right) = 0$$

$$ax = 0 \quad \text{lub} \quad x + \frac{b}{a} = 0$$

są dwa rozwiązania $x_1 = 0$, $x_2 = -\frac{b}{a}$.

Przykłady

$$3x^2 + 6x = 0$$

$$3x(x + 2) = 0$$

$$3x = 0 \quad \text{lub} \quad x + 2 = 0$$

są dwa rozwiązania (pierwiastki równania) $x_1 = 0$, $x_2 = -2$

$$-4x^2 - 8x = 0$$

$$-4x(x + 2) = 0$$

$$-4x = 0 \quad \text{lub} \quad x + 2 = 0$$

są dwa rozwiązania (pierwiastki równania) $x_1 = 0$, $x_2 = -2$

$$\frac{1}{3}x^2 - \frac{1}{6}x = 0$$

$$\frac{1}{3}x\left(x - \frac{1}{2}\right) = 0$$

są dwa rozwiązania (pierwiastki równania) $x_1 = 0$, $x_2 = \frac{1}{2}$

$$-0,5x^2 + 3x = 0$$

$$-0,5x(x - 6) = 0$$

są dwa rozwiązania (pierwiastki równania) $x_1 = 0$, $x_2 = 6$

Praca domowa

- ćw. 1 str. 306
- ćw. 2 str. 306 (bez sprawdzenia)
- ćw. 5 str. 308 (bez sprawdzenia)
- ćw. 2 str. 309 (bez sprawdzenia)