

Temat: Logarytmy – definicja i własności

DEFINICJA:

Logarytmem przy podstawie „a” z liczby „b” nazywamy taką liczbę „c”, że „a” podniesione do potęgi „c” da nam liczbę „b”. Przy czym $b > 0, a > 0, a \neq 1$.

$$\log_a b = c \Leftrightarrow a^c = b \quad \text{gdzie} \quad b > 0, a > 0, a \neq 1$$

$\log_a b$ ← liczba logarytmowana
↙
podstawa logarytmu

PRZYKŁADY:

$$\log_3 81 = 4 \quad \text{bo} \quad 3^4 = 81$$

$$\log_{10} 0,001 = -3 \quad \text{bo} \quad 10^{-3} = \frac{1}{10^3} = 0,001$$

$$\log_7 7 = 1 \quad \text{bo} \quad 7^1 = 7$$

$$\log_{0,2} 1 = 0 \quad \text{bo} \quad (0,2)^0 = 1$$

$$\log_{\sqrt{3}} \frac{1}{27} = -6 \quad \text{bo} \quad (\sqrt{3})^{-6} = 3^{-3} = \frac{1}{27}$$

.....

UWAGA:

$$\log_a 1 = 0 \quad \text{dla} \quad a \neq 1$$

$$a^0 = 1$$

$$\log_a a = 1 \quad \text{dla} \quad a \neq 1$$

$$a^1 = a$$

$\log b$ oznacza to samo co $\log_{10} b$ i nazywa się logarytmem dziesiętnym.

.....

PRZYPOMNIENIE:

a) wyznaczanie podstawy logarytmu

$$\log_x 125 = 3 \Leftrightarrow x^3 = 125 \quad \text{stąd} \quad x = 5$$

$$\log_x 100000 = 5 \Leftrightarrow x^5 = 10^5 \quad \text{stąd} \quad x = 10$$

$$\log_x 7 = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow x^{-\frac{1}{2}} = 7, \quad \frac{1}{\sqrt{x}} = 7 \quad \text{stąd} \quad x = \frac{1}{49}$$

b) obliczanie logarytmów

$$\log_2 32 = x \Leftrightarrow 2^x = 32 \text{ stąd } x = 5$$
$$\log_5 \sqrt[3]{5} = x \Leftrightarrow 5^x = \sqrt[3]{5} \text{ stąd } x = \frac{1}{3}$$

.....

Pojęcie logarytmu jest ściśle związane z pojęciem potęgi.

Zatem z praw działań na potęgach wynikają pewne własności logarytmów, ułatwiające ich obliczanie.

Sprawdzamy poniższe równości:

a) $\log_2 4 + \log_2 8 = \log_2 (4 \cdot 8)$

$$L = \log_2 4 + \log_2 8 = 2 + 3 = 5$$
$$P = \log_2 (4 \cdot 8) = \log_2 32 = 5$$

b) $\log 100 - \log 1000 = \log \frac{100}{1000}$

$$L = \log 100 - \log 1000 = 2 - 3 = -1$$
$$P = \log \frac{100}{1000} = \log \frac{1}{10} = -1$$

c) $\log_9 3^{-2} = -2 \log_9 3$

$$L = \log_9 3^{-2} = \log_9 \frac{1}{9} = -1$$
$$P = -2 \log_9 3 = -2 \log_9 \sqrt{9} = -2 \cdot \frac{1}{2} = -1$$

TWIERDZENIA:

Twierdzenie 1

Logarytm iloczynu równa się sumie logarytmów
dla $x > 0, y > 0, a > 0, a \neq 1$

$$\log_a (x \cdot y) = \log_a x + \log_a y$$

Twierdzenie 2

Logarytm ilorazu równa się różnicy logarytmów
dla $x > 0, y > 0, a > 0, a \neq 1$

$$\log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y$$

PRZYKŁADY:

$$\log_6 9 + \log_6 4 = \log_6 36 = 2$$

$$\log_{\frac{1}{2}} 25 + \log_{\frac{1}{2}} 0,01 = \log_{\frac{1}{2}} 0,25 = \log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{4} = 2$$

$$\log_3 \sqrt{6} + \log_3 \frac{\sqrt{2}}{2} = \log_3 \left(\sqrt{6} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \right) = \log_3 \frac{\sqrt{12}}{2} = \log_3 \frac{2\sqrt{3}}{2} = \log_3 \sqrt{3} = \frac{1}{2}$$

.....

$$\log_5 35 - \log_5 7 = \log_5 \frac{35}{7} = \log_5 5 = 1$$

$$\log 0,03 - \log 3 = \log \frac{0,03}{3} = \log 0,01 = -2$$

$$\log_{\frac{1}{2}} 18 - \log_{\frac{1}{2}} 9 = \log_{\frac{1}{2}} \frac{18}{9} = \log_{\frac{1}{2}} 2 = -1$$

.....

$$\log_7 2 + \log_7 3 + \log_7 5 + 1 = \log_7 (2 \cdot 3 \cdot 5) + \log_7 7 = \log_7 (30 \cdot 7) = \log_7 210$$

$$\begin{aligned} \log_2 3 - \log_2 4 + \log_2 7 - \log_2 21 &= \log_2 \frac{3}{4} + \log_2 \frac{7}{21} = \log_2 \frac{3 \cdot 7}{4 \cdot 21} = \\ &= \log_2 \frac{21}{84} = \log_2 \frac{1}{4} = -2 \end{aligned}$$

Twierdzenie 3 - Logarytm potęgi.

Jeżeli a oraz x są liczbami dodatnimi i $a \neq 1$, to dla każdej liczby n zachodzi

$$\log_a x^n = n \cdot \log_a x$$

PRZYKŁADY:

$$\log \left(\frac{1}{100} \right)^3 = 3 \log \frac{1}{100} = 3 \cdot (-2) = -6$$

$$\log_3 (\sqrt{3})^{15} = 15 \cdot \log_3 \sqrt{3} = 15 \cdot \frac{1}{2} = \frac{15}{2} = 7,5$$

$$\log_2 4^{\sqrt{3}} = \sqrt{3} \cdot \log_2 4 = 2\sqrt{3}$$

Z definicji logarytmu dla $a > 0$ i $a \neq 1$ wynikają też następujące wzory:

$\log_a a^n = n$
$a^{\log_a b} = b$

PRZYKŁADY:

$$\log_5 5^4 = 4$$

$$\log 10^8 = 8$$

$$\log_{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{2} \right)^{-3} = -3$$

$$2^{\log_2 6} = 6$$

$$3^{\log_3 \frac{1}{27}} = \frac{1}{27}$$

$$(0,2)^{\log_{0,2} 5} = 5$$

////////////////////////////////////
Korzystając z własności logarytmów oblicz:

$$\log_5 5^{-2} = \dots$$

$$\log_6 6^{15} = \dots$$

$$\log_{\frac{1}{2}} 2^{-4} = \dots$$

$$\log_{36} 6^{-12} = \dots$$

$$\log_{\sqrt{2}} 0,25 + \log_{\sqrt{2}} 4 = \dots$$

$$\log_5 100 - \log_5 4 = \dots$$

$$\log_2 6 + \log_2 12 + \log_2 \frac{4}{9} = \dots$$

$$\left(\log 2000 + \log \frac{1}{2} \right) - (\log_2 7 - \log_2 56) = \dots$$

$$\log 4 - \log 5 + \log 125 = \dots$$

PRACA DOMOWA: zad. 218 a, b, c, d str.422
 zad. 235 str. 424