

MEDIANA I DOMINANTA

Inną liczbą charakteryzującą zbiór danych jest **mediana**, zwana też **środkową zbioru**. Wyznaczenie jej rozpoczynamy od posortowania danych, czyli uporządkowania wszystkich zebranych danych niemalejąco lub nierosnąco.

DEFINICJA

Mediana, nazywana również wartością środkową, to wartość danej znajdującej się pośrodku uporządkowanych danych, jeśli liczba danych jest nieparzysta, lub średnia arytmetyczna dwóch danych znajdujących się pośrodku uporządkowanych danych, jeśli liczba danych jest parzysta. Medianę oznaczamy jako *Me*.

PRZYKŁAD 1

Wyznaczmy medianę zbioru danych:

- a) 10, 1, 8, 5, 2, 3, 8,
- b) 10, 1, 3, 5, 2, 7, 8, 11.

a)

Porządkujemy zestaw danych: 1, 2, 3, 5, 8, 8, 10.

Wartością środkową, czyli medianą zbioru danych 10, 1, 8, 5, 2, 3, 8, jest 5.

b)

Porządkujemy zestaw danych: 1, 2, 3, 5, 7, 8, 10, 11.

Pośrodku znajdują się dwie dane, więc obliczamy ich średnią arytmetyczną: $(5 + 7)/2 = 6$

Medianą zbioru danych 10, 1, 3, 5, 2, 7, 8, 11 jest 6.

PRZYKŁAD 2

Wyznaczmy medianę danych dotyczących wynagrodzenia w 20-osobowej firmie.

Wysokość wynagrodzenia w zł	1317	2820	4304	13 802	19 287
Ilość pracowników	1	12	5	1	1

Ponieważ liczba danych jest liczbą parzystą, to mediana jest średnią arytmetyczną danych znajdujących się na miejscach 10. i 11., czyli $(2820 + 2820)/2 = 2820$ zł.

Zatem mediana płac jest równa 2820 zł i ta liczba lepiej opisuje strukturę płac w tej firmie niż średnia arytmetyczna.

ĆWICZENIE 1

Wyznacz medianę twoich ocen z matematyki.

ĆWICZENIE 2

Dane są masy (w kilogramach) osób z dwóch grup.

I grupa: 75, 82, 65, 76, 82, 90, 74, 69, 57, 49.

II grupa: 101, 78, 86, 68, 57, 89, 92, 46, 61, 67.

- a) Wyznacz średnią arytmetyczną i medianę dla danych każdej grupy.

- b) Zmien największą lub najmniejszą liczbę w każdym zestawie i ponownie wyznacz średnią arytmetyczną oraz medianę.

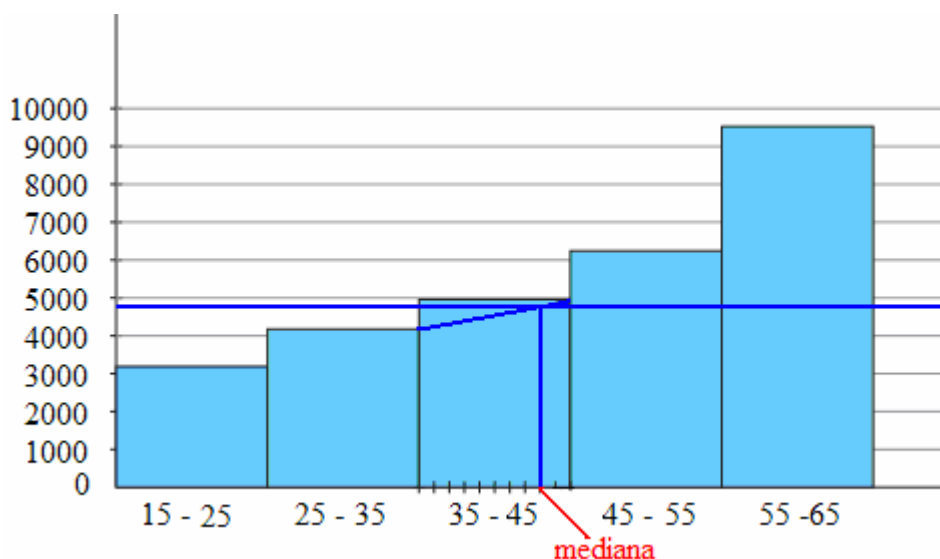
PRZYKŁAD 3

Obliczymy medianę danych dotyczących osób biernych zawodowo.

Sporządzmy skumulowany diagram słupkowy dla tych danych.

Wiek	15 - 24	25 - 34	35 - 44	45 - 54	55 - 65
Ilość osób biernych zawodowo w tys.	3186,1	991,4	777,9	1286,8	3282,5
Skumulowana ilość osób biernych zawodowo w tys.	3186,1	4177,5	4955,4	6242,2	9524,7

Na osi rzędnych znajdujemy punkt odpowiadający medianie: $9524,7 / 2 = 4762,35$ i rysujemy prostą równoległą do osi odciętych, przechodzącą przez wskazany punkt.



Mediana znajduje się w przedziale 35–45, który jest przedziałem odpowiadającym trzeciemu słupkowi diagramu. Prawy górny wierzchołek trzeciego słupka diagramu łączymy odcinkiem z prawym górnym wierzchołkiem słupka drugiego. Odcięta punktu wspólnego odcinka i narysowanej prostej wskazuje przybliżoną wartość mediany $Me \approx 43$.

PRZYKŁAD 4

W podwarszawskiej gminie przeprowadzono ankietę, w której zapytano mieszkańców, kto jest odpowiedzialny za działania na rzecz poprawy stanu środowiska w gminie. Zebrane dane przedstawiono a diagramie słupkowym. Najczęściej padała odpowiedź: odpowiedzialność ponoszą wszyscy mieszkańcy (41 %). Wynik, który pojawia się najczęściej, nazywamy modą lub dominantą, ponieważ dominuje wśród wszystkich wyników.

DEFINICJA

Moda, zwana również **dominantą**, jest najczęściej występującą wartością wśród zebranych danych. Oznaczamy ją literą D .

Jeśli w zbiorze danych występują dwie liczby o takiej samej, najwyższej częstotliwości występowania, to zbiór danych jest bimodalny. Jeśli jest kilka takich liczb, to zbiór danych jest multimodalny. Jeśli żadna wartość się nie powtarza, to zbiór nie ma mody.

PRZYKŁAD 5

Do klasy pierwszej przyjęto 30 uczniów, którzy na egzaminie gimnazjalnym w części matematyczno-przyrodniczej otrzymali następujące wyniki:

Ilość otrzymanych punktów	38	40	41	43	44	48
Ilość uczniów	3	1	6	12	5	3

Najwięcej uczniów tej klasy otrzymało 43 punkty, zatem moda jest równa 43.

Dominantę dla danych pogrupowanych można wyznaczyć za pomocą metody graficznej.

Aby wyznaczyć graficznie dominantę danych przedstawionych za pomocą przedziałów, gdy nie występuje ona w skrajnym przedziale, należy:

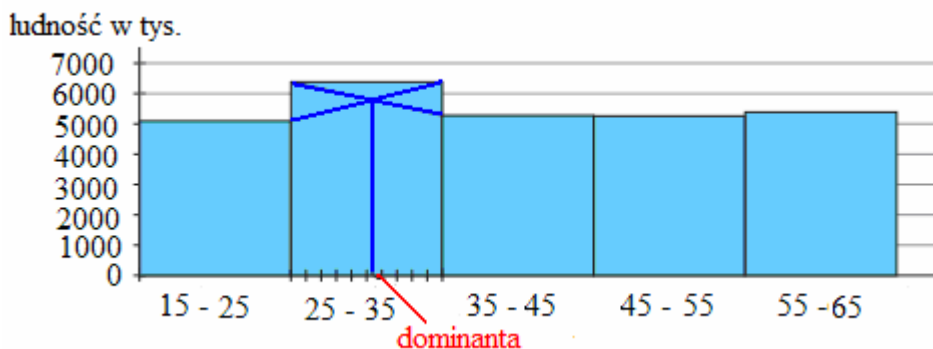
- 1) sporządzić diagram słupkowy przynajmniej dla trzech przedziałów: dla przedziału dominanty, przedziału poprzedzającego przedział dominanty oraz przedziału następującego po przedziale dominanty,*
- 2) narysować odcinki łączące górne wierzchołki prostokąta (słupka diagramu) odpowiadającego przedziałowi dominanty z należącymi do niego przeciwległymi wierzchołkami sąsiednich prostokątów,*
- 3) odczytać (zazwyczaj przybliżoną) odcięłą punktu przecięcia otrzymanych odcinków, która wskaże wartość dominanty.*
Jeżeli dominanta występuje w skrajnym przedziale, to nie określamy jej przybliżonej wartości. Podajemy tylko przedział, w którym dominanta się znajduje.

PRZYKŁAD 6

W tabeli podano liczbę ludności Polski w wybranych grupach wiekowych według stanu na 31.12.2011 r. Wyznamy dominantę zbioru pogrupowanych danych.

Wiek	15 - 24	25 - 34	35 - 44	45 - 54	55 - 65
Ilość ludności w tys.	5089,8	6381,1	5275,0	5260,3	5388,1

Najliczniejszą grupę stanowią osoby, które mają od 25 do 35 lat.
Na diagramie słupkowym ilustrującym dane z zadania kreślimy w prostokącie odpowiadającym przedziałowi dominanty odpowiednie odcinki.



Z punktu przecięcia narysowanych odcinków odczytujemy przybliżoną wartość dominanty $D \approx 30$.

Średnia arytmetyczna i mediana opisują tendencję centralną zestawu danych. Moda nie musi przedstawiać tendencji centralnej, ale wskazuje, które wyniki pojawiają się najczęściej.

ĆWICZENIE 3

W pewnej dużej firmie wynagrodzenia kształtują się w sposób zaprezentowany w tabeli.
Wyznacz dominantę zbioru pogrupowanych danych.

Wynagrodzenie w zł	Ilość osób
1417,41 – 1771,75	2952
1771,76 – 2126,10	3333
2126,10 – 2480,45	3142
2480,46 – 2834,80	3142
2834,81 – 3189,15	2825
3189,16 – 3543,50	2412

ZADANIA

Zad 1.

W 30-osobowej klasie średnia punktów z próbnej matury z matematyki była równa 19.
Ile punktów otrzymała Karolina, uczennica tej klasy, jeśli średnia punktów dla 29 uczniów
Tej klasy, bez Karoliny, wynosiła 18,5?

Zad 2.

W drugim semestrze uczeń uzyskał następujące oceny: z prac klasowych 4 i 2, z kartkówek

4 i 3, z prac domowych 5 i 5. Ocenom z prac klasowych nauczyciel przypisał wagę 5, z kartkówek – wagę 3, a z prac domowych – wagę 1.
Jaką ocenę otrzymał uczeń na koniec roku?

Zad 3.

O przyjęciu na pewną uczelnię na kierunek matematyka decydowała liczba punktów rekrutacyjnych (PR) obliczana według zasady:

$$PR = \frac{3}{4}(W_m + W_f) + \frac{1}{2}W_j$$

gdzie W_m oznacza punkty otrzymane z matematyki,
 W_f oznacza punkty otrzymane z fizyki,
 W_j oznacza punkty otrzymane z języka obcego.

Punkty z każdego przedmiotu obliczano w następujący sposób: $W = \frac{1}{3}p + \frac{2}{3}r$

gdzie p oznacza liczbę punktów otrzymanych na egzaminie maturalnym na poziomie podstawowym, r oznacza liczbę punktów otrzymanych na egzaminie maturalnym na poziomie rozszerzonym.

Oblicz wartości PR Aleksandry i Huberta, starających się o przyjęcie na ten wydział.

Przedmiot \ Uczeń		Aleksandra	Hubert
matematyka	<i>poziom podstawowy</i>	100	100
	<i>poziom rozszerzony</i>	75	80
fizyka	<i>poziom podstawowy</i>	90	100
	<i>poziom rozszerzony</i>	60	75
język obcy	<i>poziom podstawowy</i>	100	100
	<i>poziom rozszerzony</i>	80	

Puste pole w tabeli oznacza, że uczeń nie zdawał tego przedmiotu na egzaminie maturalnym. Przy rekrutacji wpisywano wówczas 0 punktów.

Zad 4.

Dany jest zbiór liczb: 101, 67, 68, 89, 61, 46, 88, 78, 57, 89, 92.

- Wyznacz medianę, modę i średnią arytmetyczną zbioru liczb.
- Zmień jedną liczbę w zbiorze tak, aby mediana nie uległa zmianie, a średnia arytmetyczna się zmieniła.

Zad 5.

W tabeli znajdują się dane dotyczące liczby Polaków aktywnych zawodowo w 2011 r.

Wiek	15 - 24	25 - 34	35 - 44	45 - 54	55 - 65
Ilość osób w tys.	1256,3	4199,7	3655,2	3419,9	1662,9

- a) Wyznacz dominantę tego zestawu danych.
- b) Wyznacz medianę tego zestawu danych.

Zad 6.

Zmierzono tętno 15 osobom i zapisano wyniki: 78, 76, 68, 72, 80, 70, 78, 75, 78, 66, 70, 74, 82, 70, 72.

Wskaż zdanie prawdziwe.

A.

Średni wynik pomiarów tętna wynosi 73.

B.

Moda wyników pomiaru tętna jest równa 74.

C.

Zestaw wyników pomiaru tętna jest bimodalny.

D.

Wartość mediany zestawu wyników pomiaru tętna jest równa wartości średniej arytmetycznej tych danych.

.....

Zad 7.

W ciągu jednego dnia na stoisku z owocami sprzedano: 5 kg jabłek w cenie 2,6 zł za 1 kg, 8 kg jabłek po 2,4 zł za 1 kg i 12 kg jabłek po 1,8 zł za 1 kg.

Oblicz średnią cenę 1 kg jabłek sprzedanych tego dnia.