

TRYGONOMETRIA

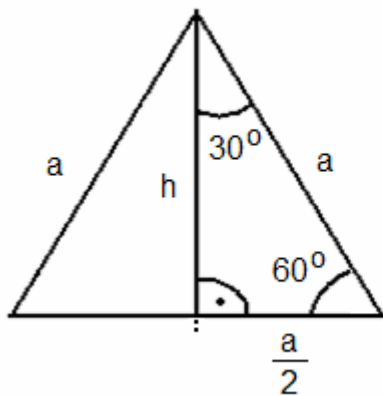
Temat: Funkcje trygonometryczne kątów 30° , 45° , 60° .

Wartości funkcji trygonometrycznych kąta ostrego możemy znaleźć w tablicach. Są to przeważnie wartości przybliżone np. do tysięcznych części ułamka dziesiętnego. Dla niektórych kątów możemy wyznaczyć dokładne wartości korzystając z własności odpowiednich trójkątów.

$30^\circ, 60^\circ$

Kreślimy trójkąt równoboczny. Wysokość dzieli go na dwa trójkąty prostokątne. Wysokość można obliczyć z tw. Pitagorasa.

$$h^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 = a^2 \quad h^2 = a^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2 \quad h^2 = \frac{3}{4}a^2 \quad h = \frac{a\sqrt{3}}{2}$$



boki trójkąta prostokątnego: a , $\frac{a}{2}$, $h = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.

kąty: 30° , 60°

kąt 30°

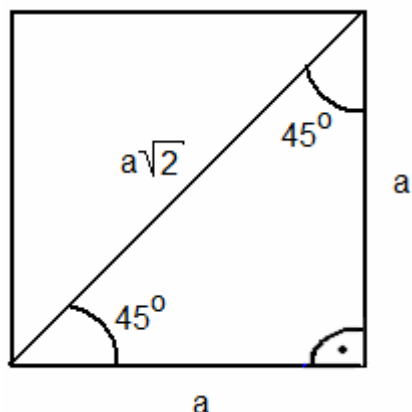
$$\sin 30^\circ = \frac{\frac{a}{2}}{a} = \frac{a}{2a} = \frac{1}{2} \quad \cos 30^\circ = \frac{h}{a} = \frac{\frac{a\sqrt{3}}{2}}{a} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$
$$\operatorname{tg} 30^\circ = \frac{\frac{a}{2}}{h} = \frac{\frac{a}{2}}{\frac{a\sqrt{3}}{2}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

kąt 60°

$$\sin 60^\circ = \frac{h}{a} = \frac{\frac{a\sqrt{3}}{2}}{a} = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad \cos 60^\circ = \frac{\frac{a}{2}}{a} = \frac{a}{2a} = \frac{1}{2}$$
$$\operatorname{tg} 60^\circ = \frac{h}{\frac{a}{2}} = \frac{\frac{a\sqrt{3}}{2}}{\frac{a}{2}} = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{2}{1} = \sqrt{3}$$

kąt 45°

Kreślmy kwadrat. Przekątna dzieli go na dwa trójkąty prostokątne. Długość przekątnej można obliczyć z tw. Pitagorasa



$$\sin 45^\circ = \frac{a}{a\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\cos 45^\circ = \frac{a}{a\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\operatorname{tg} 45^\circ = \frac{a}{a} = 1$$

Obliczone tak wartości dla kątów 30° , 45° , 60° można umieścić w tabelce. Taka tabela znajduje się w podręczniku na stronie 348.

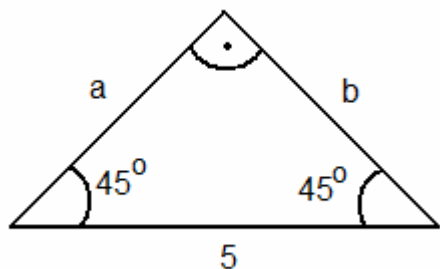
α	30°	45°	60°
$\sin \alpha$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\cos \alpha$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
$\operatorname{tg} \alpha$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$

ZADANIA:

Zadanie 1

Oblicz długości odcinków a, b, c, d.

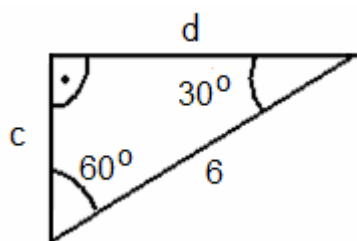
Trójkąt jest równoramienny więc $a = b$.



$$\sin 45^\circ = \frac{a}{5} \quad (\text{z rys.}) \quad \text{ale} \quad \sin 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2} \quad (\text{z tabeli})$$

$$\text{stąd} \quad \frac{a}{5} = \frac{\sqrt{2}}{2} \quad 2a = 5\sqrt{2} \quad a = 2,5\sqrt{2}$$

$$b = 2,5\sqrt{2}$$



$$\sin 30^\circ = \frac{c}{6} \quad (\text{z rys.}) \quad \text{ale} \quad \sin 60^\circ = \frac{1}{2} \quad (\text{z tabeli})$$

$$\text{stąd} \quad \frac{c}{6} = \frac{1}{2} \quad 2c = 6 \quad c = 3$$

d jest wysokością w trójkącie równobocznym, zatem $d = \frac{6\sqrt{3}}{2} = 3\sqrt{3}$.

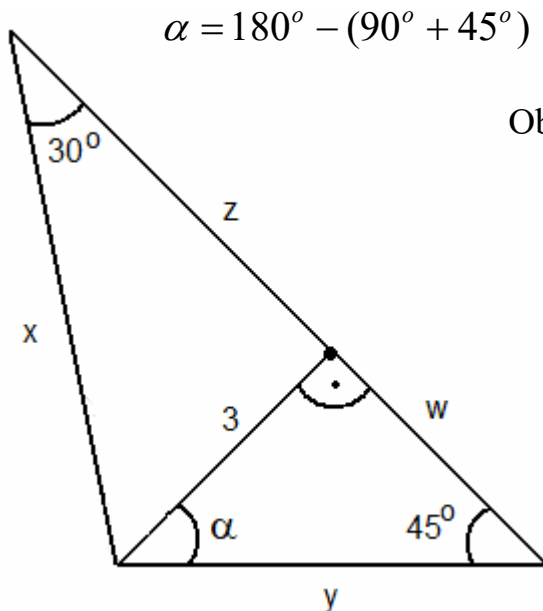
Długość odcinka d można też obliczyć korzystając z sinusa kąta 60° .

$$\sin 60^\circ = \frac{d}{6} \quad \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad \frac{d}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad d = 3\sqrt{3}$$

Zadanie 2

Oblicz obwód „dużego” trójkąta zbudowanego z dwóch trójkątów prostokątnych.

Wskazówka: odcinki oznaczone są literami x, y, w, z zatem obwód $= x + y + w + z$, wartości poszczególnych funkcji odczytujemy z tabelki.



$\alpha = 180^\circ - (90^\circ + 45^\circ)$ zatem trójkąt jest równoramienny i $w = 3$

Obliczamy długości boków:

$$\left. \begin{aligned} \sin 30^\circ &= \frac{3}{x} \\ \sin 30^\circ &= \frac{1}{2} \end{aligned} \right\} x = 6$$

$$\left. \begin{aligned} \cos 30^\circ &= \frac{z}{x} = \frac{z}{6} \\ \cos 30^\circ &= \frac{\sqrt{3}}{2} \end{aligned} \right\} z = \frac{6\sqrt{3}}{2} = 3\sqrt{3}$$

$$\left. \begin{aligned} \sin 45^\circ &= \frac{3}{y} \\ \sin 45^\circ &= \frac{\sqrt{2}}{2} \end{aligned} \right\} y = \frac{6}{\sqrt{2}} = \frac{6\sqrt{2}}{2} = 3\sqrt{2}$$

$$x + y + w + z = 6 + 3\sqrt{2} + 3 + 3\sqrt{3} = 9 + 3(\sqrt{2} + \sqrt{3}) = 3(3 + \sqrt{2} + \sqrt{3})$$

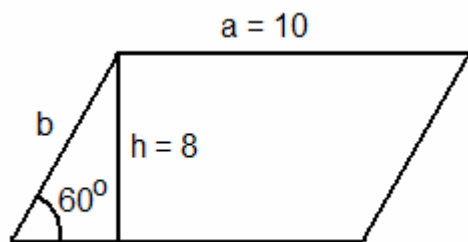
UWAGA:

Długość odcinka w można też obliczyć z tangensa kąta 45° .

$$\operatorname{tg} 45^\circ = \frac{3}{w} = 1 \quad \text{stąd} \quad w = 3$$

Zadanie 3

Oblicz obwód i pole równoległoboku.



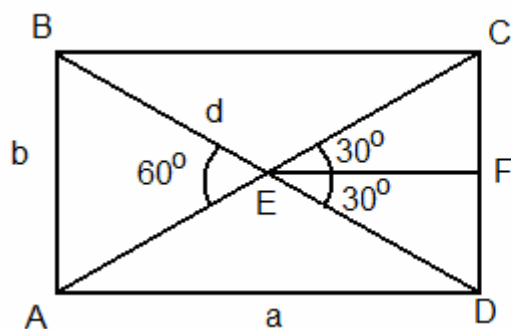
$$\left. \begin{aligned} \sin 60^\circ &= \frac{h}{b} = \frac{8}{b} \\ \sin 60^\circ &= \frac{\sqrt{3}}{2} \end{aligned} \right\} \quad \begin{aligned} \frac{8}{b} &= \frac{\sqrt{3}}{2} & b\sqrt{3} &= 8 \cdot 2 \\ b &= \frac{16}{\sqrt{3}} = \frac{16\sqrt{3}}{3} \end{aligned}$$

$$\text{Obwód} = 2a + 2b = 2 \cdot 10 + 2 \cdot \frac{16\sqrt{3}}{3} = 20 + \frac{32}{3}\sqrt{3}$$

$$\text{Pole} = ah = 10 \cdot 8 = 80$$

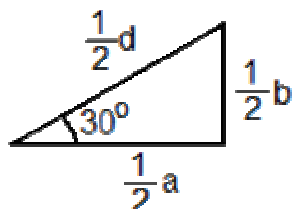
Zadanie 4

Oblicz obwód i pole prostokąta, którego przekątne mają długość 10 cm i przecinają się pod kątem 60° .



a, b - boki prostokąta
d - przekątna
d = 10 cm

$$CF = \frac{1}{2}b \quad CE = \frac{1}{2}d \quad EF = \frac{1}{2}a$$



$$\sin 30^\circ = \frac{0,5b}{0,5d} = \frac{b}{d} = \frac{b}{10} \quad \sin 30^\circ = \frac{1}{2}$$

$$\text{zatem } \frac{b}{10} = \frac{1}{2} \quad \boxed{b = 5}$$

$$\cos 30^\circ = \frac{\frac{1}{2}a}{\frac{1}{2}d} = \frac{a}{d} = \frac{a}{10}$$

$$\cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad \text{zatem } \frac{a}{10} = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad 2a = 10\sqrt{3} \quad \boxed{a = 5\sqrt{3}}$$

$$\text{Obwód} = 2a + 2b = 10\sqrt{3} + 10 = 10(\sqrt{3} + 1) \text{ cm}$$

$$\text{Pole} = ab = 25\sqrt{3} \text{ cm}^2$$

PRACA DOMOWA:

zad. 3, 4 - str. 349

zad. 5 a, b, c - str. 350

zad. 7 - str. 350