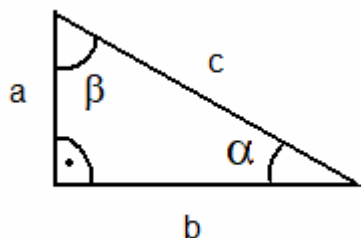


TRYGONOMETRIA

Temat: WŁASNOŚCI FUNKCJI TRYGONOMETRYCZNYCH

W trójkącie prostokątnym możemy określić funkcje trygonometryczne kąta ostrego.



$$\sin \alpha = \frac{a}{c} \quad \cos \alpha = \frac{b}{c} \quad \operatorname{tg} \alpha = \frac{a}{b}$$

$$c^2 = a^2 + b^2 \quad \alpha + \beta = 90^\circ$$

Istnieje też czwarta funkcja trygonometryczna – cotangens.

$$\operatorname{ctg} \alpha = \frac{b}{a}$$

zatem $\operatorname{ctg} \alpha = \frac{1}{\operatorname{tg} \alpha}$ (cotangens jest odwrotnością tangensa)

Cotangensem kąta ostrego w trójkącie prostokątnym nazywamy stosunek długości przyprostokątnej leżącej przy tym kącie do długości przyprostokątnej leżącej naprzeciwko kąta.

Między funkcjami trygonometrycznymi zachodzą związki:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$$

$$\operatorname{ctg} \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{\operatorname{ctg} \alpha}$$

$$\operatorname{ctg} \alpha = \frac{1}{\operatorname{tg} \alpha}$$

$$\operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{ctg} \alpha = 1$$

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$$

$$\sin(90^\circ - \alpha) = \cos \alpha$$

$$\cos(90^\circ - \alpha) = \sin \alpha$$

$$\operatorname{tg}(90^\circ - \alpha) = \operatorname{ctg} \alpha$$

$$\operatorname{ctg}(90^\circ - \alpha) = \operatorname{tg} \alpha$$

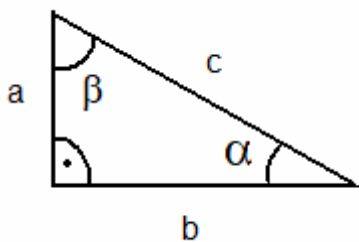
Są to tzw. wzory
redukcyjne.

UWAGA:

Zapis $\sin^2 \alpha$ oznacza to samo co $(\sin \alpha)^2$,
 $\sin^2 \alpha = (\sin \alpha)^2 \quad \cos^2 \alpha = (\cos \alpha)^2$.

Równość $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$ nazywana jest **jedynką trygonometryczną**.

SPRAWDZENIE :



$$\begin{aligned}\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha &= (\sin \alpha)^2 + (\cos \alpha)^2 = \\ &= \left(\frac{a}{c}\right)^2 + \left(\frac{b}{c}\right)^2 = \frac{a^2}{c^2} + \frac{b^2}{c^2} = \frac{a^2 + b^2}{c^2} = \frac{c^2}{c^2} = 1\end{aligned}$$

z tw. Pitagorasa $a^2 + b^2 = c^2$

$$\frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{\frac{a}{c}}{\frac{b}{c}} = \frac{a}{c} \cdot \frac{c}{b} = \frac{a}{b} = \operatorname{tg} \alpha$$

$$\frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} = \frac{\frac{b}{c}}{\frac{a}{c}} = \frac{b}{c} \cdot \frac{c}{a} = \frac{b}{a} = \operatorname{ctg} \alpha$$

$$\operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{ctg} \alpha = \frac{a}{b} \cdot \frac{b}{a} = 1$$

$$\sin(90^\circ - \alpha) = \sin \beta = \frac{b}{c} = \cos \alpha$$

$$\cos(90^\circ - \alpha) = \cos \beta = \frac{a}{c} = \sin \alpha$$

$$\operatorname{tg}(90^\circ - \alpha) = \operatorname{tg} \beta = \frac{b}{a} = \operatorname{ctg} \alpha$$

$$\operatorname{ctg}(90^\circ - \alpha) = \operatorname{ctg} \beta = \frac{a}{b} = \operatorname{tg} \alpha$$

A. Zastosowania jedynki trygonometrycznej.

Jeżeli znamy jedną z funkcji trygonometrycznych, to możemy obliczyć wartości wszystkich pozostałych.

Przykład 1

$$\sin \alpha = \frac{5}{13} \quad \text{obliczymy } \cos \alpha \text{ i } \operatorname{tg} \alpha$$

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1 \quad \text{stąd} \quad \cos^2 \alpha = 1 - \sin^2 \alpha \quad \cos^2 \alpha = 1 - \left(\frac{5}{13}\right)^2$$

$$\cos^2 \alpha = 1 - \frac{25}{169} = \frac{144}{169} \quad \cos \alpha = \sqrt{\frac{144}{169}} = \frac{12}{13} \quad \operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{\frac{5}{13}}{\frac{12}{13}} = \frac{5}{12}$$

Przykład 2

$$\cos \alpha = \frac{5}{7} \quad \text{obliczymy } \sin \alpha \text{ i } \operatorname{tg} \alpha$$

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1 \quad \text{stąd} \quad \sin^2 \alpha = 1 - \cos^2 \alpha \quad \sin^2 \alpha = 1 - \left(\frac{5}{7}\right)^2$$

$$\sin^2 \alpha = 1 - \frac{25}{49} = \frac{24}{49} \quad \sin \alpha = \sqrt{\frac{24}{49}} = \frac{2\sqrt{6}}{7} \quad \operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{\frac{2\sqrt{6}}{7}}{\frac{5}{7}} = \frac{2\sqrt{6}}{5}$$

.....

Przykład 3

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{2} \quad \text{obliczymy } \sin \alpha \text{ i } \cos \alpha$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{1}{2} \quad \text{stąd} \quad 2 \sin \alpha = \cos \alpha$$

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1 \quad \sin^2 \alpha + 4 \sin^2 \alpha = 1 \quad 5 \sin^2 \alpha = 1$$

$$\sin \alpha = \frac{1}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{5} \quad \cos \alpha = 2 \sin \alpha = \frac{2}{\sqrt{5}} = \frac{2\sqrt{5}}{5}$$

.....

UWAGA: W każdym z podanych przykładów wartość cotangensa można łatwo obliczyć wiedząc, że jest on odwrotnością tangensa.

$$\text{Np. jeżeli } \operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{2}, \text{ to } \operatorname{ctg} \alpha = 2$$

.....

Przykład 4

Uzasadnij, że nie istnieje taki kąt α , dla którego $\sin \alpha = \frac{2}{5}$ i $\cos \alpha = \frac{3}{5}$.

Rozwiązanie:

$$\left. \begin{array}{l} \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1 \\ \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = \left(\frac{2}{5}\right)^2 + \left(\frac{3}{5}\right)^2 = \frac{4}{25} + \frac{9}{25} = \frac{13}{25} \neq 1 \end{array} \right\} \text{ sprzeczność!}$$

B. Zastosowania wzorów redukcyjnych.

Przykład 1

Oblicz wartość wyrażenia $\sin^2 12^\circ + \sin^2 78^\circ$.

$$\sin^2 12^\circ + \sin^2 78^\circ = \sin^2 12^\circ + \sin^2(90^\circ - 12^\circ) = \sin^2 12^\circ + \cos^2 12^\circ = 1$$

.....

Przykład 2

Uprość wyrażenie $\frac{\sin 39^\circ}{\sin 51^\circ} \cdot \frac{\cos 39^\circ}{\sin 51^\circ}$.

$$\frac{\sin 39^\circ}{\sin 51^\circ} \cdot \frac{\cos 39^\circ}{\sin 51^\circ} = \frac{\sin 39^\circ}{\sin(90^\circ - 39^\circ)} \cdot \frac{\cos(90^\circ - 51^\circ)}{\sin 51^\circ} = \frac{\sin 39^\circ}{\cos 39^\circ} \cdot \frac{\sin 51^\circ}{\sin 51^\circ} = \operatorname{tg} 39^\circ$$

.....

Przykład 3

Znajdź miarę kąta α wiedząc, że $\cos \alpha = \sin 20^\circ$.

$$\cos \alpha = \sin 20^\circ = \sin(90^\circ - 70^\circ) = \cos 70^\circ \quad \text{zatem} \quad \alpha = 70^\circ$$

.....

Przykład 4

Znajdź miarę kąta α wiedząc, że $\sin \alpha = \cos(\alpha - 10^\circ)$.

$$\left. \begin{array}{l} \sin \alpha = \cos(\alpha - 10^\circ) \\ \sin \alpha = \cos(90^\circ - \alpha) \end{array} \right\} \leftarrow \text{wzór redukcyjny}$$

$$\text{stąd} \quad \cos(\alpha - 10^\circ) = \cos(90^\circ - \alpha) \quad \alpha - 10^\circ = 90^\circ - \alpha \quad 2\alpha = 100^\circ \quad \alpha = 50^\circ$$

.....

Przykład 5 *

Wiedząc, że $\cos 36^\circ = \frac{1+\sqrt{5}}{4}$ oblicz $\sin 54^\circ$ i $\sin 36^\circ$.

$$\sin 54^\circ = \sin(90^\circ - 36^\circ) = \cos 36^\circ \quad \text{czyli} \quad \sin 54^\circ = \frac{1+\sqrt{5}}{4}$$

Korzystamy teraz z jedynki trygonometrycznej:

$$\sin^2 36^\circ + \cos^2 36^\circ = 1 \quad \text{stąd} \quad \sin^2 36^\circ = 1 - \cos^2 36^\circ$$

$$\sin^2 36^\circ = 1 - \left(\frac{1+\sqrt{5}}{4} \right)^2 = 1 - \frac{(1+\sqrt{5})^2}{16} = 1 - \frac{1+2\sqrt{5}+5}{16} = \frac{16-1-5-2\sqrt{5}}{16} = \frac{10-2\sqrt{5}}{16}$$

$$\text{zatem} \quad \sin 36^\circ = \sqrt{\frac{10-2\sqrt{5}}{16}} = \frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4} = \frac{\sqrt{2(5-\sqrt{5})}}{4}$$

PRACA DOMOWA:

ćw. 1 - str. 357

ćw. 2 - str. 358

zad. 3 - str. 351

zad. 8 - str. 359 (*dla chętnych*)