

Temat: TOŻSAMOŚCI TRYGONOMETRYCZNE

PRZYPOMNIENIE WŁASNOŚCI FUNKCJI TRYGONOMETRYCZNYCH:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$$

$$\operatorname{ctg} \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{\operatorname{ctg} \alpha}$$

$$\operatorname{ctg} \alpha = \frac{1}{\operatorname{tg} \alpha}$$

$$\operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{ctg} \alpha = 1$$

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$$

Powyższe własności funkcji trygonometrycznych przydatne są do udowadniania tożsamości trygonometrycznych czyli do sprawdzania, czy podane wzory są prawdziwe dla dowolnego kąta α . Należy sprawdzić, czy lewa strona wzoru jest równa jego prawej stronie. Jeżeli tak nie jest, to wzór nie jest tożsamością. Własności w ramce powyżej są przykładami najprostszych tożsamości.

Przykład 1

Sprawdzamy, czy $1 + \operatorname{ctg} \alpha = \frac{\sin \alpha + \cos \alpha}{\sin \alpha}$?

$$P = \frac{\sin \alpha + \cos \alpha}{\sin \alpha} = \frac{\sin \alpha}{\sin \alpha} + \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} = 1 + \operatorname{ctg} \alpha = L$$

Uwaga:

Przez L oznaczać będziemy lewą stronę równości, a literą P prawą stronę.

Przykład 2

$$(\sin \alpha + \cos \alpha)^2 + (\sin \alpha - \cos \alpha)^2 = 2$$

$$L = (\sin \alpha + \cos \alpha)^2 + (\sin \alpha - \cos \alpha)^2 = \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha + 2 \sin \alpha \cdot \cos \alpha + \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha - 2 \sin \alpha \cdot \cos \alpha = 1 + 2 \sin \alpha \cdot \cos \alpha + 1 - 2 \sin \alpha \cdot \cos \alpha = 2$$

zatem $L = P$

Korzystaliśmy ze wzorów skróconego mnożenia oraz z jedynki trygonometrycznej.

Przykład 3

$$\frac{\cos \alpha}{1 + \sin \alpha} + \frac{\cos \alpha}{1 - \sin \alpha} = \frac{2}{\cos \alpha}$$
$$L = \frac{\cos \alpha}{1 + \sin \alpha} + \frac{\cos \alpha}{1 - \sin \alpha} = \frac{\cos \alpha(1 - \sin \alpha)}{(1 + \sin \alpha)(1 - \sin \alpha)} + \frac{\cos \alpha(1 + \sin \alpha)}{(1 + \sin \alpha)(1 - \sin \alpha)} =$$
$$= \frac{\cos \alpha - \cos \alpha \cdot \sin \alpha + \cos \alpha + \cos \alpha \cdot \sin \alpha}{(1 + \sin \alpha)(1 - \sin \alpha)} = \frac{2 \cos \alpha}{1 - \sin^2 \alpha} = \frac{2 \cos \alpha}{\cos^2 \alpha} = \frac{2}{\cos \alpha} = P$$

Korzystaliśmy ze sprowadzania ułamków do wspólnego mianownika oraz jedynki trygonometrycznej.

DOPROWADZANIE WYRAŻEŃ TRYGONOMETRYCZNYCH
DO PROSTSZYCH POSTACI

z zastosowaniem własności funkcji trygonometrycznych, wzorów redukcyjnych
i jedynki trygonometrycznej

Przykład 4

$$\operatorname{tg} 37^\circ \cdot \sin 53^\circ = \frac{\sin 37^\circ}{\cos 37^\circ} \cdot \sin(90^\circ - 37^\circ) = \frac{\sin 37^\circ}{\cos 37^\circ} \cdot \cos 37^\circ = \sin 37^\circ$$

.....

Przykład 5

$$\frac{1 - \sin^2 \alpha}{\sin \alpha \cdot \cos \alpha} = \frac{\cos^2 \alpha}{\sin \alpha \cdot \cos \alpha} = \frac{\cos \alpha \cdot \cos \alpha}{\sin \alpha \cdot \cos \alpha} = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} = \operatorname{ctg} \alpha$$

.....

Przykład 6

$$\frac{\cos \alpha + \operatorname{tg} \alpha \cdot \sin \alpha}{\operatorname{tg} \alpha} = \frac{\cos \alpha}{\operatorname{tg} \alpha} + \frac{\operatorname{tg} \alpha \cdot \sin \alpha}{\operatorname{tg} \alpha} = \frac{\cos \alpha}{\frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}} + \sin \alpha = \cos \alpha \cdot \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} + \sin \alpha =$$
$$= \frac{\cos^2 \alpha}{\sin \alpha} + \frac{\sin^2 \alpha}{\sin \alpha} = \frac{\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha}{\sin \alpha} = \frac{1}{\sin \alpha}$$

.....

Przykład 7

$$\operatorname{ctg}(90^\circ - \alpha) \cdot \operatorname{ctg} \alpha = \operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{ctg} \alpha = \operatorname{tg} \alpha \cdot \frac{1}{\operatorname{tg} \alpha} = 1$$

Przykład 8

$$\frac{\sin \alpha}{\sin(90^\circ - \alpha)} \cdot \frac{\cos \alpha}{\cos(90^\circ - \alpha)} = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} \cdot \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} = 1$$

.....

Przykład 9 Uprość wyrażenie $\frac{\sin^3 \alpha}{1 - \cos^2 \alpha}$ i oblicz jego wartość dla $\alpha = 60^\circ$.

$$\frac{\sin^3 \alpha}{1 - \cos^2 \alpha} = \frac{\sin^3 \alpha}{\sin^2 \alpha} = \sin \alpha \qquad \sin \alpha = \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

.....

Przykład 10 Uprość wyrażenie $\sin^2 \alpha - \cos^2 \alpha$ i oblicz jego wartość dla $\alpha = 60^\circ$.

$$\sin^2 \alpha - \cos^2 \alpha = (1 - \cos^2 \alpha) - \cos^2 \alpha = 1 - 2\cos^2 \alpha$$

$$1 - 2 \cos^2 \alpha = 1 - 2 \cos^2 60^\circ = 1 - 2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 = 1 - \frac{2}{4} = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

PRACA DOMOWA:

ZAD. 331 a, b, c - STR. 402

ZAD. 332 a, b, c - STR. 402